

MATURITÀ 2026

Soluzioni della Seconda Prova di Matematica

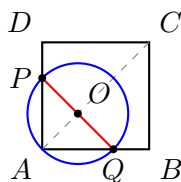
A cura di: **Giuseppe Nozzi**
Giulia Pallotta

Data: 19 Giugno 2026

1. Risoluzione dei Quesiti

Quesito 1

Cecilia mostra a Nicolò una variante del gioco "Cover the spot": disegna su un foglio un quadrato $ABCD$ di lato $\sqrt{2}$ dm e poi ritaglia tre cartoncini circolari di raggio $\frac{2}{3}$ dm. Lo scopo del gioco è quello di coprire, con i tre cerchi, la maggior parte possibile del quadrato. Cecilia posiziona inizialmente un cartoncino in modo che il centro sia sulla diagonale AC del quadrato e il bordo passi per A . Prima di posizionare il secondo cartoncino, afferma che ha già coperto più della metà del quadrato, mentre Nicolò dice che non è così. Chi ha ragione? Motivare la risposta.



Risoluzione e Commento. L'area del quadrato $ABCD$ di lato $l = \sqrt{2}$ dm misura $\mathcal{A}_{ABCD} = l^2 = 2$ dm². L'area del cerchio $\mathcal{C}$ di raggio $r = \frac{2}{3}$ dm è pari a $\mathcal{A}_{\mathcal{C}} = \pi r^2 = \frac{4}{9}\pi$ dm² $\sim 1,396$ dm².

Il cerchio è centrato sulla diagonale AC e il suo bordo passa per il vertice A . Dunque, due segmenti circolari fuoriescono dalla regione individuata dal quadrato.

Osserviamo che, indicando rispettivamente con P e Q i punti individuati dall'intersezione della circonferenza con i lati AD e AB del quadrato:

- i due triangoli AOP e AOQ sono entrambi isosceli, perché i lati AO , PO e QO sono raggi del cerchio $\mathcal{C}$;
- gli angoli $\widehat{PAO}$ e $\widehat{OAQ}$ misurano 45° , essendo la diagonale AC la bisettrice dell'angolo retto in A ;
- di conseguenza, dato che si tratta di triangoli isosceli, anche gli angoli $\widehat{APO}$ e $\widehat{AQO}$ misurano 45° .

Dunque, i due triangoli APO e AQO sono isosceli e rettangoli in O . Di conseguenza, $\widehat{POA} \cong \widehat{QOA} = 90^\circ$.

I due settori circolari (e i due segmenti circolari) che insistono sugli archi AP e AQ sono quindi congruenti. Calcoliamo l'area di un singolo settore circolare $\mathcal{S}$ utilizzando la proporzione:

$$\mathcal{A}_{\mathcal{C}} : \mathcal{A}_{\mathcal{S}} = 360^\circ : 90^\circ,$$

ottenendo così:

$$\mathcal{A}_S = \frac{\mathcal{A}_C}{4} = \frac{\pi}{9} \text{ dm}^2.$$

L'area del triangolo rettangolo APO è invece pari a:

$$\mathcal{A}_{APO} = \frac{PO \cdot AO}{2} = \frac{r^2}{2} = \frac{2}{9} \text{ dm}^2.$$

Per sottrazione, possiamo trovare l'area del singolo segmento circolare esterno $\mathcal{A}_{SC}$:

$$\mathcal{A}_{SC} = \mathcal{A}_S - \mathcal{A}_{APO} = \frac{\pi}{9} - \frac{2}{9} = \frac{\pi - 2}{9} \text{ dm}^2.$$

L'area della regione di cerchio contenuta nel quadrato è infine pari a:

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_C - 2\mathcal{A}_{SC} = \frac{4}{9}\pi - \frac{2\pi - 4}{9} = \frac{2\pi + 4}{9} \text{ dm}^2 \sim 1,142 \text{ dm}^2.$$

Dato che la metà dell'area del quadrato corrisponde a 1 dm^2 e poiché $1,142 > 1$, si deduce che Cecilia ha ragione.

Quesito 2

Si considerino, nello spazio tridimensionale, i punti $A(2; -4; 3)$, $B(3; 5; -1)$, $C(-6; 1; 0)$, $D(-1; 4; 8)$.

- Verificare che A, B, C, D sono i vertici di un tetraedro regolare.
- Determinare l'equazione del piano tangente in A alla superficie sferica passante per i punti A, B, C, D .

Risoluzione e Commento. a) Un tetraedro è regolare se tutte le sue facce sono triangoli equilateri congruenti, quindi verifichiamo che i lati AB, BC, CD, DA, BD siano congruenti:

$$d_{AB} = \sqrt{(3-2)^2 + (5-(-4))^2 + (-1-3)^2} = \sqrt{1+81+16} = \sqrt{98}$$

$$d_{AC} = \sqrt{(-6-2)^2 + (1-(-4))^2 + (0-3)^2} = \sqrt{64+25+9} = \sqrt{98}$$

$$d_{AD} = \sqrt{(-1-2)^2 + (4-(-4))^2 + (8-3)^2} = \sqrt{9+64+25} = \sqrt{98}$$

$$d_{BC} = \sqrt{(-6-3)^2 + (1-5)^2 + (0-(-1))^2} = \sqrt{81+16+1} = \sqrt{98}$$

$$d_{BD} = \sqrt{(-1-3)^2 + (4-5)^2 + (8-(-1))^2} = \sqrt{16+1+81} = \sqrt{98}$$

$$d_{CD} = \sqrt{(-1-(-6))^2 + (4-1)^2 + (8-0)^2} = \sqrt{25+9+64} = \sqrt{98}$$

Poiché tutte le distanze sono uguali, ovvero misurano $\sqrt{98} = 7\sqrt{2}$, il tetraedro è regolare.

b) Il centro O della sfera circoscritta ad un tetraedro regolare coincide con il baricentro G dei vertici:

$$\begin{aligned} O &= \left(\frac{x_A + x_B + x_C + x_D}{4}, \frac{y_A + y_B + y_C + y_D}{4}, \frac{z_A + z_B + z_C + z_D}{4} \right) \\ &= \left(\frac{2+3-6-1}{4}, \frac{-4+5+1+4}{4}, \frac{3-1+0+8}{4} \right) \\ &= \left(-\frac{2}{4}, \frac{6}{4}, \frac{10}{4} \right) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2} \right). \end{aligned}$$

Il piano tangente in A è perpendicolare al raggio OA . Il vettore normale $\vec{n}$ del piano è quindi pari al vettore $\vec{OA}$:

$$\vec{n} = \left(2 - \left(-\frac{1}{2} \right), -4 - \frac{3}{2}, 3 - \frac{5}{2} \right) = \left(\frac{5}{2}, -\frac{11}{2}, \frac{1}{2} \right).$$

Moltiplichiamo il vettore normale per 2 per semplificare i coefficienti: $\vec{n} = (5, -11, 1)$. L'equazione del piano passante per $A(2, -4, 3)$ è:

$$a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0$$

$$5(x - 2) - 11(y + 4) + 1(z - 3) = 0$$

$$5x - 10 - 11y - 44 + z - 3 = 0$$

$$5x - 11y + z - 57 = 0$$

Quesito 3

3. Nel 1976, 50 anni fa, due scosse di terremoto, a maggio e a settembre, di magnitudo $M_1 = 6,5$ e $M_2 = 6,0$ della scala Richter, colpirono un vasto territorio a nord di Udine.

La magnitudo M di un terremoto, secondo la scala Richter, è data da $M = \log_{10} \left(\frac{A}{A_0} \right)$, dove A rappresenta il massimo delle ampiezze registrate da un sismografo e A_0 è un'ampiezza di riferimento.

Si determini il rapporto $\frac{A_1}{A_2}$ tra le ampiezze prodotte dai due eventi sismici friulani.

Dalla legge empirica di Gutenberg - Richter $\log_{10} \frac{E}{E_0} = 1,5M + 4,8$, dove E è l'energia liberata dal terremoto ed E_0 un'energia di riferimento, si determini la variazione percentuale dell'energia liberata tra il primo e il secondo terremoto.

Risoluzione e Commento. Dati $M_1 = 6,5$ e $M_2 = 6,0$, dalla formula $M = \log_{10} \left(\frac{A}{A_0} \right)$ otteniamo $A = A_0 \cdot 10^M$. Il rapporto tra le ampiezze è:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{A_0 \cdot 10^{M_1}}{A_0 \cdot 10^{M_2}} = 10^{M_1 - M_2}$$

Sostituendo i valori:

$$\frac{A_1}{A_2} = 10^{6,5 - 6,0} = 10^{0,5} \approx 3,16$$

Dalla legge di Gutenberg-Richter $\log_{10} \left(\frac{E}{E_0} \right) = 1,5M + 4,8$, si ha $E = E_0 \cdot 10^{1,5M + 4,8}$. Il rapporto tra le energie è:

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{E_0 \cdot 10^{1,5M_1 + 4,8}}{E_0 \cdot 10^{1,5M_2 + 4,8}} = 10^{1,5(M_1 - M_2)}$$

Sostituendo i valori:

$$\frac{E_1}{E_2} = 10^{1,5(0,5)} = 10^{0,75} \approx 5,62$$

La variazione percentuale è:

$$\text{Variazione } \% = \left(\frac{E_1}{E_2} - 1 \right) \cdot 100 \approx (5,62 - 1) \cdot 100 = 462\%$$

Il primo terremoto ha liberato circa il 462% in più di energia rispetto al secondo.

Quesito 4

Si consideri la funzione $F(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt + \int_0^{\frac{1}{x}} \frac{1}{1+t^2} dt$ (con $x > 0$). Dimostrare che la funzione $F(x)$ è una funzione costante e calcolarne il valore.

Risoluzione e Commento. Per determinare se la funzione $F(x)$ è costante verifichiamo che la derivata prima sia nulla per ogni $x > 0$. Ci ricordiamo che per una funzione integrale

$$F'(x) = \frac{d}{dx} \int_0^{g(x)} f(t) dt = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Dunque, per la nostra specifica funzione otteniamo

$$F'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+(1/x)^2} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = 0$$

Per calcolare il valore della costante scegliamo un valore di x comodo per fare i conti. Scegliamo $x = 1$.

$$\begin{aligned} F(1) &= 2 \cdot \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt \\ &= 2 \cdot [\arctan(x)]_0^1 \\ &= 2 \cdot \left(\frac{\pi}{4} - 0\right) = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

La funzione è costante di valore $\pi/2$.

Quesito 5

Determinare i valori dei parametri reali h, k , con $h \neq 0$, in modo che la curva di equazione $y = h \ln(x^2 + k)^5$ abbia le rette $x = -\sqrt{3}$ e $x = \sqrt{3}$ come asintoti verticali e le rette tangenti nei punti A e B di intersezione con l'asse delle ascisse si incontrino in $C(0; -4)$.

Risoluzione e Commento. Anzitutto riscriviamoci la funzione applicando le proprietà dei logaritmi come

$$f(x) = y = 5h \ln(x^2 + k).$$

Il dominio della funzione si calcola imponendo che $x^2 + k \neq 0$. Otteniamo che $x \neq \sqrt{-k}, -\sqrt{-k}$. Calcoliamo i limiti della funzione

$$\lim_{x \rightarrow \sqrt{k}^+} f(x) = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow \sqrt{k}^-} f(x) = -\infty$$

e analogamente

$$\lim_{x \rightarrow -\sqrt{k}^+} f(x) = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow -\sqrt{k}^-} f(x) = +\infty.$$

Di conseguenza affinché le rette $x = \sqrt{3}, x = -\sqrt{3}$ siano asintoti verticali, deve essere che $x^2 + k = 0$ e sostituendo i valori di x otteniamo $k = -3$.

Per trovare i punti di intersezione di $f(x)$ con l'asse delle ascisse imponiamo che $f(x) = 0$. Dunque,

$$5h \ln(x^2 - 3) = 0$$

ovvero $\ln(x^2 - 3) = 0$. Applicando l'esponenziale ad entrambi i lati otteniamo $x^2 - 3 = 1$, che ha soluzioni $x = 2, x = -2$. Per determinare le rette tangenti al grafico nei punti $A(2, 0)$ e $B(-2, 0)$ calcoliamo la derivata della funzione in $x = 2$ e $x = -2$.

$$f'(x) = \frac{5h}{x^2 - 3} \cdot (2x)$$

I coefficienti angolari delle rette tangenti in A e B sono rispettivamente $20h$ e $-20h$. Le rette tangenti sono

$$r_1: y = 20h(x - 2), \quad r_2: y = -20h(x + 2).$$

Tali rette devono incontrarsi nei punti $0, -4$. Imponendo il passaggio delle rette in questo punto otteniamo $-4 = 20h(-2)$, ovvero $h = \frac{1}{10}$.

Quesito 6

Determinare l'espressione del polinomio $p(x)$ tale che il grafico della funzione $f(x) = \frac{p(x)}{2x+1}$ passi per il punto $P(1;0)$ ed abbia per asintoto obliquo la retta di equazione $y = 3x - 2$.

Risoluzione e Commento. Ricordiamo che una funzione razionale fratta ammette un asintoto obliquo se e solo se il grado del numeratore è esattamente superiore di una unità rispetto a quello del denominatore. Possiamo quindi porre $p(x) = ax^2 + bx + c$, con $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Affinché il grafico della funzione passi per il punto $P(1;0)$, la funzione deve annullarsi in $x = 1$:

$$0 = \frac{p(1)}{2(1)+1} \implies 0 = \frac{p(1)}{3}$$

da cui ricaviamo $p(1) = 0$. Sostituendo $x = 1$ nell'espressione del polinomio, otteniamo la prima condizione sui parametri:

$$a + b + c = 0$$

Determiniamo ora il coefficiente angolare m dell'asintoto obliquo calcolando il limite:

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^2 + bx + c}{x(2x+1)} = \frac{a}{2}$$

Poiché l'asintoto assegnato è la retta $y = 3x - 2$, il cui coefficiente angolare è 3, imponiamo $\frac{a}{2} = 3$, da cui si ottiene immediatamente $a = 6$.

Calcoliamo il termine noto q dell'asintoto obliquo facendo il limite

$$q = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(-3x + bx + c)}{2x + 1} = -2.$$

Otteniamo che $\frac{-3+b}{2} = -2$, ovvero $b = -1$. L'ultima incognita c la troviamo imponendo che $a+b+c = 0$ sapendo che $a = 6$ e $b = -1$. Troviamo $c = -5$. Il polinomio cercato è

$$p(x) = 6x^2 - x - 5.$$

Quesito 7

Giuseppe, Lorenzo, Massimo e Vincenzo sono impegnati in una partita di scopone. All'inizio del gioco, a ciascun giocatore vengono casualmente distribuite 10 carte di un mazzo da 40 (diviso nei 4 semi: bastoni, coppe, denari e spade).

- Determinare la probabilità che le prime 3 carte distribuite a Massimo siano tutte e 3 di coppe.
- Determinare la probabilità che, tra le 10 carte distribuite a Lorenzo, siano presenti i 3 assi di bastoni, spade e denari.

Risoluzione e Commento. Osserviamo anzitutto che la probabilità è indipendente dal modo in cui vengono distribuite le carte ai giocatori. Senza perdita di generalità assumiamo che Massimo le riceva una dopo l'altra.

Il mazzo è composto da 40 carte totali, divise equamente in 4 semi (Bastoni, Coppe, Denari, Spade). Questo significa che per ogni seme ci sono esattamente 10 carte. La probabilità che Massimo riceva 3 carte di coppe si calcola facendo

$$\frac{10}{40} \cdot \frac{9}{39} \cdot \frac{8}{38} \cong 1.2\%$$

Per calcolare la probabilità che la mano di Lorenzo contenga i tre assi richiesti, possiamo determinare la probabilità che questi vengano estratti come prime tre carte, per poi moltiplicare il risultato per il numero di modi possibili in cui i tre assi possono posizionarsi all'interno delle sue dieci carte totali. La probabilità che li abbia ricevuti come prime carte è

$$\frac{3}{40} \cdot \frac{2}{39} \cdot \frac{1}{38}$$

mentre i possibili modi di sistemare 3 oggetti in 10 posizioni possibili è

$$\binom{10}{3} = 120$$

In totale otteniamo che la probabilità è

$$120 * \frac{3}{40} \cdot \frac{2}{39} \cdot \frac{1}{38}$$

che è esattamente uguale alla probabilità precedente ovvero $\cong 1.2\%$.

Quesito 8

Ad un torneo internazionale di pallavolo partecipano 16 squadre, che devono essere suddivise in 4 gironi (indicati con le lettere A, B, C, D) di 4 squadre ciascuno.

Le 16 squadre partecipanti sono inizialmente ripartite in 3 fasce, in base all'attuale ranking: 4 squadre di 1^a fascia, 4 di 2^a fascia e 8 squadre di 3^a fascia. Le 4 squadre di 1^a fascia vengono inserite, rispettivamente, nei gironi A, B, C, D, secondo l'ordine del ranking (senza alcun sorteggio). Le altre squadre di ogni girone vengono invece sorteggiate, in modo che in ciascuno di essi vi siano una squadra di 2^a fascia e due squadre di 3^a fascia.

Quante sono, complessivamente, le possibili composizioni dei gironi A, B, C, D?

Risoluzione e Commento. La scelta dell'inserimento delle squadre appartenenti alla prima fascia non è aleatoria ma stabilita secondo un criterio di ranking. Dunque guardiamo ai possibili modi di inserire le squadre della seconda fascia nei gironi A, B, C, D. Per la prima squadra della seconda fascia abbiamo 4 possibilità, per la seconda squadra 3 possibilità e così via. Otteniamo $4! = 24$ modi diversi di inserire le 4 squadre della seconda fascia nei 4 gironi.

Per la terza fascia ragioniamo in modo analogo. Per il girone A abbiamo $\binom{8}{2}$ scelte possibili, per il girone B ne abbiamo $\binom{6}{2}$, per il girone C ne abbiamo $\binom{4}{2}$ mentre per il girone D abbiamo una sola possibilità data dalle due squadre rimanenti. Otteniamo

$$\binom{8}{2} \cdot \binom{6}{2} \cdot \binom{4}{2} = 28 * 15 * 6$$

possibilità per la scelta delle squadre nella terza fascia. Moltiplicando per le possibili scelte delle squadre nella seconda fascia otteniamo

$$24 \cdot (28 * 15 * 6) = 60480.$$