

MATURITÀ 2026
Soluzioni della Seconda Prova di Matematica

A cura di: **Giuseppe Nozzi**
Giulia Pallotta

Data: 19 Giugno 2026

Problema 2

Siano φ_a e γ , rispettivamente, i grafici rappresentativi delle funzioni:

$$f_a(x) = \frac{ax^2}{x-1}, \text{ con } a \neq 0 \qquad g(x) = \frac{|x|}{x^2+1}$$

- a) Al variare del parametro a , studiare gli intervalli di monotonia della funzione f_a . Considerata la retta r , di equazione $y = k$ ($k \in \mathbb{R}$), determinare i valori di a e k in modo che r risulti tangente ai grafici φ_a e γ .
- b) Siano A e B i punti stazionari, rispettivamente, dei grafici φ_a e γ , con $x_A \neq 0$ e $x_B > 0$. Determinare il valore di a in corrispondenza del quale la misura del segmento AB risulti minima.

D'ora in avanti, si ponga $a = \frac{1}{8}$.

- c) Studiare le funzioni $f_{\frac{1}{8}}$ e g , esaminandone in particolare la continuità e la derivabilità, e tracciare i loro grafici $\varphi_{\frac{1}{8}}$ e γ in un medesimo sistema di riferimento. Utilizzare tali grafici per risolvere la disequazione $f_{\frac{1}{8}}(x) > g(x)$.
- d) Calcolare l'area della regione finita di piano delimitata da γ , dall'asse x e dalle rette parallele all'asse y passanti per i punti di flesso.

Risoluzione del Problema 2

a) La funzione $f_a(x)$ è continua e derivabile in tutti i punti del dominio. Dunque è continua e derivabile per ogni $x \neq 1$.

Per determinare gli intervalli di monotonia calcoliamo la derivata di $f_a(x)$.

$$f_a(x)' = \frac{ax^2 - 2ax}{(x-1)^2}$$

Studiamo il segno della derivata e notiamo che se

1. $a > 0$. La funzione è crescente per $x < 0$ e $x > 2$ mentre è decrescente per $0 < x < 2$. In $x = 0$ ha un massimo relativo e $x = 2$ un minimo relativo.
2. $a < 0$. Il comportamento è speculare al caso $a > 0$. La funzione è decrescente per $x < 0$ e $x > 2$ mentre è crescente per $0 < x < 2$. In $x = 0$ ha un minimo relativo e $x = 2$ un massimo relativo.

Essendo che la retta $y = k$ è orizzontale, affinché sia tangente a $f_a(x)$ deve farlo in un punto che annulla la derivata. Analogamente per $g(x)$. I punti che annullano la derivata di $f_a(x)$ li abbiamo già calcolati e sono $x = 0$ e $x = 2$ dove la funzione vale $f_a(0) = 0$ e $f_a(2) = 4a$.



Figura 1: Grafico del problema (Geogebra)

Calcoliamo la derivata di $g(x)$. Essa è una funzione pari dunque determiniamo il comportamento per $x > 0$. Il grafico di $g(x)$ è infatti simmetrico rispetto all'asse y . Per $x > 0$ si ha che

$$g'(x) = \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2}$$

Tale derivata si annulla nel punto $x = 1$. Analogamente per $x < 0$ la derivata di $g(x)$ si annulla nel punto $x = -1$. In $x = 1$ si ha che $g(1) = \frac{1}{2} = g(-1)$. Dunque l'unica possibilità per k è $k = 1/2$. Per calcolare a imponiamo che $f_a(2) = \frac{1}{2}$, ottenendo $a = \frac{1}{8}$.

b) Le coordinate del punto A sono $x_A = 2$ e $y_A = 4a$, mentre quelle del punto B sono $x_B = 1$ e $y_B = \frac{1}{2}$. Determiniamo la lunghezza al quadrato $|AB|^2$ del segmento AB . Ovvero

$$|AB|^2 = 1 + \left(4a - \frac{1}{2}\right)^2.$$

Affinche abbia lunghezza minima deve essere che

$$\frac{d}{da}|AB|^2 = 8\left(4a - \frac{1}{2}\right) = 0$$

Otteniamo $a = \frac{1}{8}$, che è proprio un punto di minimo.

c) Adesso studiamo il grafico della funzione

$$f_{\frac{1}{8}}(x) = \frac{x^2}{8(x-1)}.$$

Il dominio è $x \neq 1$. La funzione è positiva per $x > 1$ e negativa per $x < 1$. I limiti della funzione in 1 valgono

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty.$$

Abbiamo che $x = 1$ è un asintoto verticale. Tale funzione ammette anche un asintoto obliquo, infatti

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$$

inoltre per calcolare il coefficiente angolare m e il termine noto q dell'asintoto obliquo svolgiamo i limiti

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{8x(x-1)} = \frac{1}{8}$$

e

$$q = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - \frac{1}{8}x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{8x-1} = \frac{1}{8}.$$

L'asintoto obliquo cercato è $y = \frac{1}{8}x + \frac{1}{8}$. Calcoliamo i possibili flessi della funzione facendone la derivata seconda

$$f''_{\frac{1}{8}}(x) = \frac{1}{8} \cdot \frac{(2x-2) \cdot (x-1)^2 - (x^2-2x) \cdot 2(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{1}{4(x-1)^3}$$

La funzione cambia concavità in $x = 1$ che non è un punto del dominio (concava per $x < 1$ e convessa per $x > 1$).

Studiamo ora la funzione $g(x)$. Il dominio è tutto $\mathbb{R}$, dove la funzione è continua. Il modulo non è derivabile in 0 dunque ci aspettiamo che la funzione non sia derivabile in 0 e che $x = 0$ sia un punto angoloso.

La funzione $g(x)$ è sempre positiva. Calcoliamo i limiti all'infinito

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0 \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 0.$$

Otteniamo che $g(x)$ ammette un asintoto orizzontale $y = 0$. E' un funzione pari quindi d'ora in poi considereremo solo $x > 0$. Determiniamo la derivata prima

$$g'(x) = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$$

Otteniamo che $x = 1$ è un punto stazionario. Inoltre

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g'(x) = 1 \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} g'(x) = -1$$

ovvero $x = 0$ è un punto angoloso. Essendo che la funzione è crescente per $0 < x < 1$ e decrescente per $x > 1$ si ha che $x = 1$ è punto di massimo. Calcoliamo i flessi della funzione. Per fare ciò determiniamo la derivata seconda

$$g''(x) = \frac{2x(x^2-3)}{(x^2+1)^3}$$

Otteniamo che $x = \sqrt{3}$ è un punto di flesso. Il grafico sarà poi simmetrico rispetto all'asse y . Guardando il grafico osserviamo che la disequazione è verificata per $x > 1$.

d) Per determinare l'area della regione richiesta, essendo la funzione pari, basta moltiplicare per 2 l'integrale di g tra 0 e $\sqrt{3}$, otteniamo

$$2 \int_0^{\sqrt{3}} g(t) dt = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{2t}{t^2+1} dt = [\ln(x^2+1)]_0^{\sqrt{3}} = \ln(4).$$