

Maturità 2026

Soluzioni della Seconda Prova di Matematica

A cura di: **Giuseppe Nozzi**
Giulia Pallotta

Data: 19 Giugno 2026

Problema 2

In tabella sono indicati i rilevamenti, fatti a inizio anno a partire dal 2016, del livello dell'acqua del lago di Bracciano. Nel 2016 e nel 2017 il lago, oggetto di prelievi, era utilizzato come riserva idrica di emergenza per i comuni limitrofi e per l'approvvigionamento di Roma. Nel 2017, in considerazione dell'impatto ambientale e del notevole abbassamento del livello idrometrico rispetto a quello considerato ottimale, si è deciso di interrompere i prelievi, sospensione tuttora in atto.

Anno (al 1° gennaio)	2016	2017	2018	2019	2020	2021	2022	2023	2024	2025	2026
Differenza del livello rispetto allo zero idrometrico (in dm)	-6	-16	-20	-18	-16	-14	-12	-10	-10	-10	-10

Si scelga un sistema di riferimento in cui l'unità, sull'asse delle ascisse, corrisponda all'arco temporale di un anno e il 1° gennaio 2016 allo zero, mentre sull'asse delle ordinate l'unità corrisponda a una differenza di 1 dm rispetto allo zero idrometrico (livello ottimale).

Con buona approssimazione, dall'inizio del 2016 fino all'inizio del 2019, si può descrivere l'andamento del livello delle acque con il modello polinomiale

$$y = a(x - 2)^4 + b(x - 2)^3 + c(x - 2)^2 - 20, \quad a, b, c \in \mathbb{R}.$$

Nel periodo tra l'inizio del 2019 e l'inizio del 2023 si assume una crescita oscillante, approssimata con un modello del tipo $y = mx - 24 + \sin^2(\pi x)$, con $m \in \mathbb{R}$. Poi, fino all'inizio del 2026, l'andamento può essere approssimato con un modello del tipo $y = 2\cos(2\pi x) + k$, con $k \in \mathbb{R}$.

- a) Utilizzando i dati riportati in tabella e le informazioni fornite, definire il modello matematico $f(x)$ che esprime l'andamento del livello delle acque del lago in funzione del tempo, dopo aver determinato i valori dei parametri.

Si assuma come modello descrittivo dell'andamento idrometrico del lago la funzione

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}(x - 2)^4 - (x - 2)^3 + \frac{7}{2}(x - 2)^2 - 20, & 0 \leq x < 3 \\ 2x - 24 + \sin^2(\pi x), & 3 \leq x \leq 7 \\ 2\cos(2\pi x) - 12, & 7 < x \leq 10 \end{cases}$$

- a) Studiare f e tracciare un suo grafico, dopo aver verificato la continuità, studiato la derivabilità e determinato i punti di estremo relativo.
- b) Giustificare la non applicabilità del teorema di Lagrange alla funzione f in $[0; 10]$.

Esistono, tuttavia, punti di ascissa $s \in]0; 10[$ tali che $f'(s) = \frac{f(10) - f(0)}{10}$?

Motivare la risposta.

- c) Spiegare perché il teorema della Media Integrata è applicabile alla funzione f in $[0; 10]$. Calcolare, quindi, la variazione media Δh del livello delle acque del lago negli anni presi in esame.

Infine, considerando che la superficie del lago è di circa 57 km^2 , utilizzare Δh per stimare, in litri, la differenza del volume di acqua tra l'inizio del 2016 e l'inizio del 2026.

Risoluzione del Problema 2

a) Per determinare i valori dei parametri a, b, c utilizziamo i dati della tabella per l'intervallo $x \in [0, 3)$, dalla quale ricaviamo:

- per l'anno 2016 ($x = 0$), impostiamo l'equazione

$$a(0 - 2)^4 + b(0 - 2)^3 + c(0 - 2)^2 - 20 = -16,$$

ottenendo $16a - 8b + 4c = 4$, che si semplifica in $4a - 2b + c = 1$;

- per l'anno 2017 ($x = 1$) allo stesso modo otteniamo $a - b + c = 4$;
- per l'anno 2018 ($x = 2$) otteniamo l'identità $-20 = -20$;
- per l'anno 2019 ($x = 3$) otteniamo $a + b + c = 2$.

Il sistema di tre equazioni in tre incognite:
$$\begin{cases} 4a - 2b + c = 1 \\ a - b + c = 4 \\ a + b + c = 2 \end{cases}$$
 ha come soluzioni reali $a = -\frac{1}{2}$,

$b = -1$, $c = \frac{7}{2}$.

Per determinare il valore del parametro m nell'intervallo $x \in [3, 7]$, è sufficiente sostituire i valori della tabella, ottenendo:

$$m = \frac{-18 + 24 - \sin^2(3\pi)}{3} = \frac{-16 + 24 - \sin^2(4\pi)}{4} = \dots = 2.$$

Per determinare il valore della fase k nell'intervallo $x \in (7, 10]$, sostituiamo i valori della tabella dal 2024, ottenendo:

$$k = -10 - 2 \cos(16\pi) = -10 - 2 \cos(18\pi) = -10 - 2 \cos(20\pi) = -12.$$

b) Studiamo la funzione

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}(x-2)^4 - (x-2)^3 + \frac{7}{2}(x-2)^2 - 20, & 0 \leq x < 3 \\ 2x - 24 + \sin^2(\pi x), & 3 \leq x \leq 7 \\ 2 \cos(2\pi x) - 12, & 7 < x \leq 10 \end{cases}$$

La funzione $f(x)$ è definita nell'intervallo chiuso e limitato $[0, 10]$. Per dimostrarne la continuità globale, analizziamo dapprima la natura dei singoli rami nei rispettivi intervalli aperti e, successivamente, il comportamento della funzione nei punti di giunzione $x = 3$ e $x = 7$. Negli intervalli $[0, 3)$, $(3, 7)$, $(7, 10]$ la funzione è continua poiché somma e composizione di funzioni continue.

Calcoliamo

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \left[-\frac{1}{2}(x-2)^4 - (x-2)^3 + \frac{7}{2}(x-2)^2 - 20 \right] = -18$$

e

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} [2x - 24 + \sin^2(\pi x)] = -18.$$

Otteniamo che la funzione è continua in $x = 3$. In modo del tutto analogo otteniamo che la funzione è continua in $x = 7$. La funzione $f(x)$ è continua in tutti i punti dell'intervallo chiuso $[0, 10]$.

Calcoliamo ora la derivata prima di $f(x)$.

$$f'(x) = \begin{cases} -2(x-2)^3 - 3(x-2)^2 + 7(x-2), & 0 < x < 3 \\ 2 + \pi \sin(2\pi x), & 3 \leq x \leq 7 \\ -4\pi \sin(2\pi x), & 7 < x < 10 \end{cases}$$

Calcoliamo i limiti

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} [-2(x-2)^3 - 3(x-2)^2 + 7(x-2)] = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} [2 + \pi \sin(2\pi x)] = 2.$$

Rimane da calcolare

$$\lim_{x \rightarrow 7^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 7^-} [2 + \pi \sin(2\pi x)] = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 7^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 7^+} [-4\pi \sin(2\pi x)] = 0.$$

Otteniamo che $f(x)$ è derivabile in ogni punto dell'intervallo $[0, 10]$ ad eccezione del punto $x = 7$ dove c'è un punto angoloso.

Determiniamo ora massimi e minimi relativi della funzione $f(x)$. Consideriamo l'intervallo $[0, 3]$ dove la derivata prima vale

$$f'(x) = -2(x-2)^3 - 3(x-2)^2 + 7(x-2) = (x-2)(-2x^2 + 5x + 5)$$

Imponiamo $f'(x) = 0$ e troviamo tre soluzioni

$$m = 2, \quad a = \frac{-5 + \sqrt{5^2 + 40}}{-4}, \quad b = \frac{-5 - \sqrt{5^2 + 40}}{4}$$

Osserviamo che i punti a e b sono fuori dal dominio. Inoltre studiando il segno di $f'(x)$ osserviamo che $x = 2$ è un minimo per $f(x)$.

Il secondo tratto della funzione è definito da:

$$f_2(x) = 2x - 24 + \sin^2(\pi x)$$

La sua derivata prima è pari a:

$$f_2'(x) = 2 + \pi \sin(2\pi x)$$

Studiamo il segno ponendo $f_2'(x) \geq 0$:

$$2 + \pi \sin(2\pi x) \geq 0 \implies \sin(2\pi x) \geq -\frac{2}{\pi} \approx -0.6366$$

Risolvendo l'equazione associata, cerchiamo i valori dell'argomento $2\pi x$ nei quadranti in cui il seno assume tale valore negativo (3° e 4° quadrante), includendo la periodicità $2k\pi$:

$$2\pi x_1 = -\arcsin\left(\frac{2}{\pi}\right) + 2k\pi \quad \text{e} \quad 2\pi x_2 = \pi + \arcsin\left(\frac{2}{\pi}\right) + 2k\pi$$

Dividendo ambo i membri per 2π per isolare la variabile x , si ricavano le intersezioni nella forma:

$$x_1 = k - \alpha \quad \text{e} \quad x_2 = k + \frac{1}{2} + \alpha \quad \left(\text{con } \alpha = \frac{1}{2\pi} \arcsin\left(\frac{2}{\pi}\right) \approx 0.110 \right)$$

con $k \in \{3, 4, 5, 6, 7\}$. Dallo studio del segno della disequazione trigonometrica si ricava l'alternanza dei punti stazionari interni all'intervallo $[3, 7]$:

- Massimi relativi ($x = k + 0.5 + \alpha$): $x \approx 3.61, 4.61, 5.61, 6.61$
- Minimi relativi ($x = k - \alpha$): $x \approx 3.89, 4.89, 5.89, 6.89$

Il terzo tratto della funzione è definito da:

$$f_3(x) = 2 \cos(2\pi x) - 12$$

La sua derivata prima è

$$f'_3(x) = 2 \cdot (-\sin(2\pi x) \cdot 2\pi) = -4\pi \sin(2\pi x)$$

Per determinare gli intervalli di monotonia e i punti critici, studiamo il segno ponendo $f'_3(x) \geq 0$:

$$-4\pi \sin(2\pi x) \geq 0$$

Otteniamo:

$$\sin(2\pi x) \leq 0$$

che ha soluzione per

$$\pi + 2k\pi \leq 2\pi x \leq 2\pi + 2k\pi$$

ovvero $\frac{1}{2} + k \leq x \leq 1 + k$ dove $k \in \{7, 8, 9\}$.

- $k = 7$. La funzione decresce in $(7, \frac{15}{2})$ e cresce in $(\frac{15}{2}, 8]$. Il punto $x = \frac{15}{2}$ è un minimo relativo. Il punto $x = 8$ è un massimo relativo.
- $k = 8$. La funzione decresce in $(8, \frac{17}{2})$ e cresce in $(\frac{17}{2}, 9]$. Il punto $x = \frac{17}{2}$ è un minimo relativo. Il punto $x = 9$ è un massimo relativo.
- $k = 9$. La funzione decresce in $(9, \frac{19}{2})$ e cresce in $(\frac{19}{2}, 10]$. Il punto $x = \frac{19}{2}$ è un minimo relativo. Il punto sul bordo $x = 10$ è un massimo.

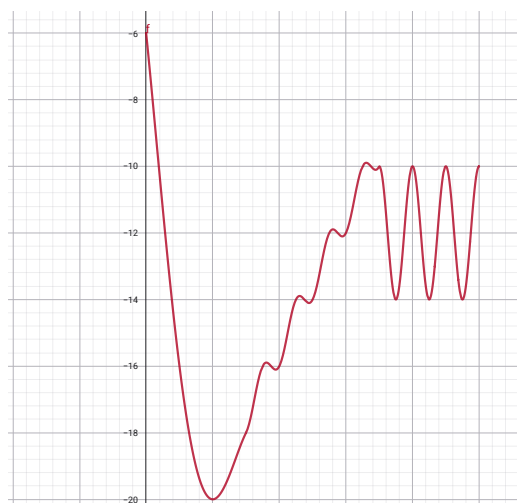


Figura 1: Grafico del problema (Geogebra)

c) Le ipotesi del Teorema di Lagrange richiedono che la funzione f sia continua nell'intervallo chiuso e limitato $[0, 10]$ e derivabile nell'intervallo aperto $(0, 10)$, ma la funzione non è derivabile nel punto di ascissa $x = 7$.

Osserviamo che la funzione $f'(x)$ è continua e derivabile nell'intervallo $[0, 2]$. Poiché

$$\frac{f(10) - f(0)}{10} = -\frac{2}{5}$$

e sapendo che $f'(0) = -10$ e $f'(2) = 0$, la funzione assume tutti i valori compresi tra -10 e 0 . Di conseguenza esiste $s \in (0, 2)$ tale che $f'(s) = -\frac{2}{5}$.

d) La funzione è continua nell'intervallo $[0, 10]$, dunque risultano soddisfatte le ipotesi del teorema della media integrale.

Per il teorema della media integrale, per calcolare Δh è necessario calcolare l'integrale:

$$\Delta h = \frac{1}{10-0} \int_0^{10} f(x) dx = \frac{1}{10} \left(\int_0^3 f(x) dx + \int_3^7 f(x) dx + \int_7^{10} f(x) dx \right).$$

Calcoliamo il primo termine:

$$\begin{aligned} \int_0^3 f(x) dx &= -\frac{1}{2} \int_0^3 (x-2)^4 dx - \int_0^3 (x-2)^3 dx + \frac{7}{2} \int_0^3 (x-2)^2 dx - 20 \int_0^3 dx \\ &= \left[-\frac{(x-2)^5}{10} - \frac{(x-2)^4}{4} + \frac{7(x-2)^3}{6} - 20x \right]_0^3 = -\frac{981}{20}. \end{aligned}$$

Calcoliamo il secondo termine:

$$\begin{aligned} \int_3^7 f(x) dx &= 2 \int_3^7 x dx - 24 \int_3^7 dx + \int_3^7 \sin^2(\pi x) dx \\ &= \left[x^2 - 24x + \frac{x}{2} - \frac{\sin(2\pi x)}{4\pi} \right]_3^7 = -54. \end{aligned}$$

Calcoliamo il terzo termine:

$$\begin{aligned} \int_7^{10} f(x) dx &= 2 \int_7^{10} \cos(2\pi x) - 12 \int_7^{10} dx \\ &= \left[\frac{\sin(2\pi x)}{\pi} - 12x \right]_7^{10} = -36. \end{aligned}$$

Possiamo quindi calcolare Δh sommando i risultati:

$$\Delta h = \frac{1}{10} \left(-\frac{981}{20} - 54 - 36 \right) = -\frac{2781}{200} \text{ dm}.$$

c) Sappiamo che $\Delta h = -\frac{2781}{200} \text{ dm} = -\frac{2781}{2000} \text{ m}$, e che la superficie S del lago misura $S = 57 \cdot 10^6 \text{ m}^2$. Il volume si calcola moltiplicando la variazione del livello $|\Delta h|$ per la superficie S :

$$V = |\Delta h| \cdot S = 79.2585 \cdot 10^6 \text{ m}^3.$$

Ricordandoci che $1 \text{ m}^3 = 10^3 \text{ l}$ si ha che la variazione di volume negli anni è pari a $79.2585 \cdot 10^9$ litri.